Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

В. А. УСПЕНСКИЙ

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ МЕХАНИКИ К МАТЕМАТИКЕ

*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА · 1958

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

ВЫПУСК 27

В. А. УСПЕНСКИЙ

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ МЕХАНИКИ К МАТЕМАТИКЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1958

АННОТАЦИЯ

Настоящая лекция рассчитана на учащихся средних школ (7—10 классы). В ней рассмотрены простые решения различных математических задач (иногда довольно сложных) при помощи использования некоторых положений механики.

Успенский Владимир Андреевич

Некоторые приложения механики к математике

Редактор *Лапко А. Ф.*

Техн. редактор *Крючкова В. Н.* Корректор *Плетнева Т. С.*

Сдано в набор 25/IV 1958 г. Подписано к печати 30/VII 1958 г. Бумага 84 × 108/32. Физ. печ. л. 1,5. Условн. печ. л. 2,46. Уч.-изд. л. 2,45. Тираж 35 000 экз. Т-07191. Цена книги 75 коп. Заказ № 1881.

Государственное издательство физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Московского городского Совнархоза.
Москва, Ж-54, Валовая, 28.

Отпечатано с готового набора в типографии издательства
МГУ. Москва, Моховая, 9 заказ 989

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 4
§ 1. Задача о касательной к окружности 5
§ 2. Задача о касательной к эллипсу 7
§ 3. Задачи о касательных к параболе и гиперболе 12
§ 4. Принцип минимума потенциальной энергии 17
§ 5. Материальные точки и центр тяжести 21
§ 6. Центр тяжести системы двух материальных точек 25
§ 7. Теоремы о пересечении прямых 26
§ 8. Центр тяжести стержня с многими грузами 29
§ 9. Одна задача из теории чисел (формулировка) 32
§ 10. Одна задача из теории чисел (решение) 35
§ 11. Невозможность вечного двигателя 40
Заключение 42

ПРЕДИСЛОВИЕ

Применения математики в физике (в частности, в механике) общеизвестны: достаточно раскрыть школьный учебник. Высшие разделы механики требуют сложного и тонкого математического аппарата.

Существуют, однако, математические задачи, при решении которых с успехом могут быть использованы понятия и законы физики; см., например, главы IV и VI книги Л. А. Люстерника «Кратчайшие линии», изданной в качестве 19-го выпуска настоящей серии. Ряд подобного рода задач, решаемых методами механики (а именно с привлечением законов равновесия), был приведен автором в его лекции «Решение математических задач методами механики», читанной для школьников 7—8 классов в Московском государственном университете 19 февраля 1956 г.; эта лекция, с незначительными добавлениями, и составляет содержание данной брошюры.

Автор глубоко благодарен Исааку Моисеевичу Яглому, обстоятельные замечания которого способствовали уменьшению числа недостатков этой книжки.

§ 1. ЗАДАЧА О КАСАТЕЛЬНОЙ К ОКРУЖНОСТИ

Как известно, *касательной* к окружности называется прямая, имеющая с этой окружностью ровно одну общую точку (называемую *точкой касания*). В учебниках геометрии доказывается, что касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному из центра окружности в точку касания. Приведем доказательство этой теоремы, опирающееся на соображения механики.

С этой целью проделаем мысленно следующий эксперимент. Представим себе, что грузик, прикрепленный к концу M нити, висит на этой нити; другой конец нити закреплен в точке O. Из повседневного опыта читатель, конечно, знает, что при этом

(А) *Грузик находится в самом нижнем из возможных положений, которые он может занимать, будучи связан нитью.*

Этот факт, имеющий решающее значение для наших рассуждений, сам по себе совершенно очевиден; полезно, однако, заметить, что он представляет собой частное проявление некоей общей закономерности (формулируемой в так называемом «принципе минимума потенциальной энергии»), с которой нам придется встретиться в более сложной обстановке в § 4. Точнее, при помощи упомянутого «принципа минимума потенциальной энергии» утверждение (А) выводится из следующего очевидного утверждения (Е):

(Е) *Существует только одно положение равновесия грузика,* т. е. положение грузика в покое полностью определяется положением точки O и длиной нити.

Из единственности положения равновесия (утверждение Е) вытекает, далее, что

(С) *Грузик находится на вертикальной прямой, проведенной из точки подвеса.*

В самом деле, если бы грузик не находился на этой вертикальной прямой, то, поворачивая вокруг нее нить вместе с

грузиком, мы получили бы новое положение равновесия (рис. 1). В этом рассуждении мы опираемся, таким образом, еще на один известный из опыта факт:

(S) *Если тело или систему тел, находящихся в равновесии, повернуть вокруг вертикальной прямой, то новое положение будет также положением равновесия.*

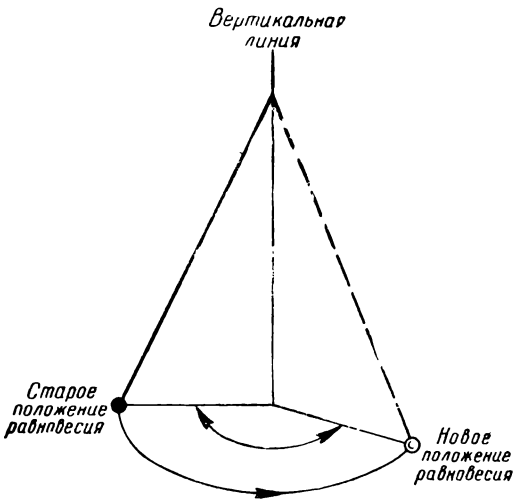

Рис. 1.

Из утверждений (A) и (C) вытекает, что

(B) *Расстояние от грузика до точки подвеса O равно длине нити MO* (это означает, что нить натянута).

(Заметим вскользь, что утверждения (B) и (C), конечно, не менее очевидны, чем те, из которых мы их вывели.)

Перейдем теперь к доказательству нашей теоремы. Пусть (рис. 2) дана окружность с центром в точке O и прямая p, касающаяся этой окружности в точке P. Надо доказать, что $OP \perp p$. Перерисуем наш чертеж на вертикальной стене, причем так, чтобы прямая p была горизонтальна и окружность была расположена *над* прямой p. (Если поставить эту книжку вертикально на ее нижний срез, то рис. 3 будет отвечать указанным только что требованиям.) Заметим, что точка P будет при этом самой нижней точкой окружности. Возьмем теперь нить, длина которой равна радиусу окружности, и закрепим один ее конец в центре окружности O. К другому концу,

который обозначим буквой M, прикрепим грузик и подвесим его на нити. Покажем, что конец M попадет в точку P. Действительно, во-первых, в силу (B), конец M может находиться лишь на окружности; во-вторых, в силу (A), этот конец находится в самой нижней точке этой окружности, т. е. в P. Таким образом, нить пойдет по радиусу OP. Стало быть, в силу (C), этот радиус перпендикулярен прямой p, что и требовалось доказать.

Разобранный только что пример, конечно, не очень интересен, ибо он посвящен доказательству хорошо известной и довольно простой теоремы. Однако в дальнейшем этот же метод

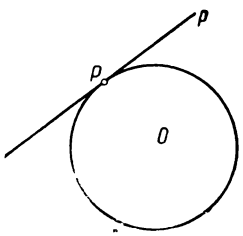

Рис. 2.

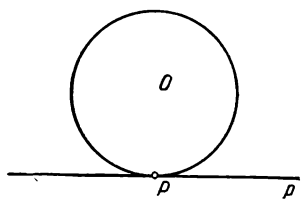

Рис. 3.

будет применен к доказательству новых теорем. При этом нам пригодятся навыки, приобретенные в этом параграфе при «механическом» доказательстве теоремы о касательной к окружности. Прежде всего мы займемся в следующем параграфе естественным обобщением этой теоремы, а именно теоремой о касательной к эллипсу.

§ 2. ЗАДАЧА О КАСАТЕЛЬНОЙ К ЭЛЛИПСУ

Окружность определяется как геометрическое место точек A, расстояние AO от которых до заданной точки O равно заданному числу l. Обобщением этого определения является определение эллипса. *Эллипсом* (рис. 4) называется геометрическое место точек A, сумма расстояний $AO_1 + AO_2$ от которых до двух заданных точек O_1 и O_2 равна заданному числу l. Точки O_1 и O_2 называются *фокусами* эллипса, а l — *длиной большой оси* эллипса. Отрезки AO_1 и AO_2, соединяющие какую-либо точку A на эллипсе с фокусами, называются *фокальными радиусами*, проведенными в точку A. Окружность есть частный случай эллипса, когда точки O_1 и O_2 совпадают.

Фокальные радиусы в этом случае тоже совпадают и равны радиусу окружности.

Каждый может нарисовать эллипс, если возьмет нить, закрепит оба ее конца в каких-нибудь точках O_1 и O_2, выбранных на листе бумаги с тем расчетом, чтобы расстояние O_1O_2 было меньше длины нити, и затем проведет линию, натягивая нить острием карандаша (рис. 5). О свойствах эллипса см. в книге А. И. Маркушевича «Замечательные кривые», составляющей 4-й выпуск настоящей серии.

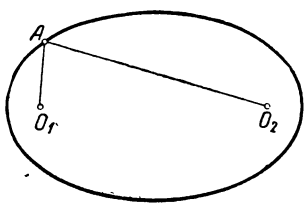

Рис. 4.

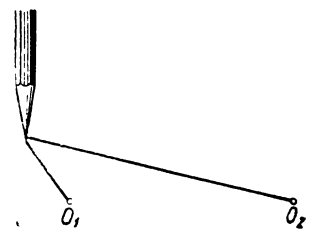

Рис. 5.

Как и в случае окружности, прямая называется *касательной* к эллипсу, если она имеет с ним ровно одну общую точку (рис. 6).

Имеет место следующая теорема о касательной к эллипсу: *Касательная к эллипсу образует равные углы с фокальными радиусами, проведенными в точку касания* (на рис. 6 такими равными углами являются углы KPO_1 и LPO_2).

Частным случаем этой теоремы является теорема о касательной к окружности. Действительно, в случае окружности оба фокальных радиуса совпадают, поэтому теорема о касательной к эллипсу формулируется для случая окружности так: касательная образует равные смежные углы с радиусом, проведенным в точку касания; а это и означает перпендикулярность радиуса и касательной.

Мы дадим сейчас доказательство теоремы о касательной к эллипсу, аналогичное тому, какое мы дали для теоремы о касательной к окружности. Рекомендуем читателю, прежде чем читать дальше, попытаться самому придумать такое «механическое» доказательство.

Как и в предыдущем параграфе, мы предпошлем доказательству некий механический эксперимент. Фиксируем в вертикальной плоскости на равной высоте две точки $\overline{O}_1$ и $\overline{O}_2$. Возьмем далее нить, длина которой превосходит расстояние $\overline{O}_1\overline{O}_2$, и при-

крепим концы этой нити к точкам $\overline{O}_1$ и $\overline{O}_2$. На нить наденем грузик таким образом, чтобы он мог свободно скользить вдоль нити (например, проденем нить в ушко гири, как это показано на рис. 7). Если мы теперь предоставим грузику свободно висеть на нити, то он попадет в конце концов в некоторую точку $\overline{M}$, где и будет находиться в состоянии покоя. Очевидно, что имеют место следующие два факта:

($\overline{C}_1$) *Плоскость* $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{M}$ *вертикальна* (т. е. проходит через вертикальную прямую).

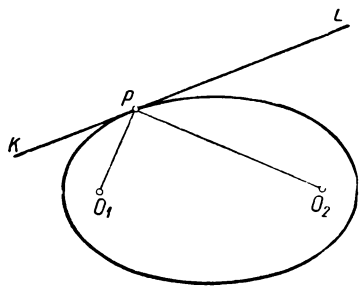

Рис. 6.

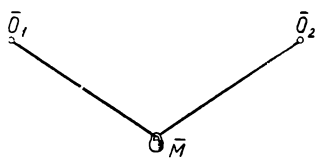

Рис. 7.

($\overline{C}_2$) *Углы, образованные отрезками* $\overline{M}\,\overline{O}_1$ *и* $\overline{M}\ \overline{O}_2$ *с горизонтальной прямой, проведенной через точку* $\overline{M}$ *в плоскости* $\overline{M}\ \overline{O}_1\overline{O}_2$, *равны.*

Заметим, что утверждения ($\overline{C}_1$) и ($\overline{C}_2$) можно вывести из утверждения о единственности положения равновесия грузика. С этой целью проведем вертикальную прямую через середину отрезка $\overline{O}_1\overline{O}_2$ и повернем нашу нить вместе с грузиком вокруг этой прямой на 180°. Конец нити $\overline{O}_1$ попадет теперь в точку $\overline{O}_2$, а конец $\overline{O}_2$ — в точку $\overline{O}_1$. Согласно утверждению (S) из предыдущего параграфа, мы получим состояние равновесия, поэтому, в силу предположенной единственности этого состояния, нить (а вместе с ней и треугольник $\overline{M}\ \overline{O}_1\overline{O}_2$) совместится со своим прежним положением. Раз треугольник при повороте на 180° совмещается сам с собой, значит, ось вращения лежит в плоскости треугольника. Значит, плоскость $\overline{M}\overline{O}_1\overline{O}_2$ проходит через вертикальную ось, т. е. она вертикальна. Далее, при произведенном повороте горизонтальная прямая, проведенная через $\overline{M}$ в плоскости $\overline{M}\ \overline{O}_1\ \overline{O}_2$, совместится сама с собой, а угол, образованный ею с отрезком $\overline{M}\overline{O}_1$, совместится с углом, образованным ею же с отрезком $\overline{M}\ \overline{O}_2$. Значит, эти углы равны.

Избавимся теперь от предположения, что точки подвеса находятся на одинаковой высоте. Пусть O_1 и O_2 — произвольные точки. Подвесим к ним на нити свободно скользящий вдоль

нее грузик (рис. 8). Пусть в покое грузик находится в точке M. Заметим, что если грузик находится в M и если мы закрепим нить в любой ее точке, то положение грузика не изменится. (Действительно, если, скажем, мы закрепим нить в точке $\overline{O}_2$, см. рис. 8, то натяжение участка нити $\overline{O}_2O_2$ заменится реакцией опоры в точке $\overline{O}_2$.) Это обстоятельство позволяет распространить на общий случай выводы, сделанные нами при рассмотрении равновысотных точек подвеса. В самом деле, достаточно закрепить нить в точке $\overline{O}_2$, находящейся на той же высоте, что и O_1 (рис. 8[1])); положение равновесия при этом не изменится. Положив $\overline{O}_1 = O_1$, мы придем к разобранному ранее случаю равновысотных точек подвеса $\overline{O}_1$ и $\overline{O}_2$. Поэтому из $(\overline{C}_1)$ и $(\overline{C}_2)$ немедленно вытекают утверждения $(\overline{C}_1)$ (очевидное само по себе) и $(\overline{C}_2)$:

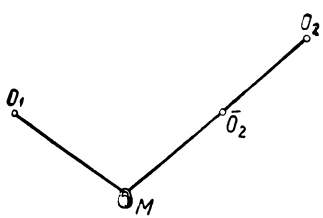

Рис. 8.

(C_1) *Плоскость O_1O_2M вертикальна.*

(C_2) *Углы, образованные отрезками MO_1 и MO_2 с горизонтальной прямой, проведенной через точку M в плоскости MO_1O_2, равны.*

Очевидным образом справедливы, наконец, еще следующие два утверждения:

(A) *В положении равновесия грузик занимает самое нижнее из всех положений, которые он может занимать, будучи связан нитью* (при помощи упоминавшегося уже в § 1 принципа минимума потенциальной энергии это утверждение выводится из единственности положения равновесия).

(B) *В положении равновесия нить натянута* (это значит, что отрезки нити MO_1 и MO_2 прямолинейны и, следовательно, сумма расстояний от точки M до O_1 и O_2 равна длине нити).

Вернемся к доказательству нашей теоремы о касательной. Пусть дан эллипс с фокусами O_1 и O_2 (см. рис. 6) и длиной большой оси l и прямая KL, касающаяся его в точке P. Требуется доказать, что $\angle O_1PK = \angle O_2PL$. Для доказательства повернем чертеж так, чтобы плоскость чертежа стала вертикаль-

[1]) На чертеже O_2 выше, чем O_1; случай, когда O_1 выше, чем O_2, разбирается аналогично.

ной, прямая KL горизонтальной, а эллипс был расположен над прямой KL (тогда P будет самой нижней точкой эллипса). Возьмем нить длины l, наденем на нее грузик, закрепим концы нити в точках O_1 и O_2, после чего отпустим грузик. Он займет некоторое положение M. В силу (C_1) точка M будет лежать в плоскости чертежа. В силу (В) она будет лежать на эллипсе. В силу (А) она совместится с P. Таким образом, нить пойдет по отрезкам PO_1 и PO_2. В силу (C_2) углы, образованные этими отрезками с прямой KL, будут равны.

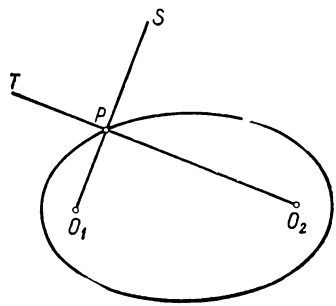

Рис. 9.

Другое доказательство этой теоремы, также использующее соображения механики, читатель найдет в § 11 книги Л. А. Люстерника «Кратчайшие линии».

Свойство касательной к эллипсу образовывать равные углы с фокальными радиусами дает возможность построить циркулем и линейкой касательную к эллипсу (коль скоро заданы его фокусы) в заданной точке. Для этого достаточно провести прямые через точку касания P и фокусы O_1 и O_2 (см. рис. 9) и найти биссектрису угла SPO_2 (или угла TPO_1). Эта биссектриса и будет касательной.

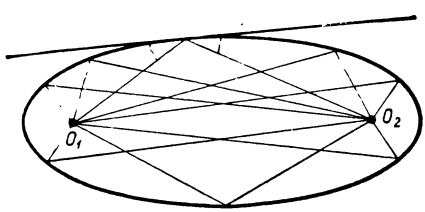

Рис. 10.

[r] Теорема о касательной к эллипсу имеет интересную оптическую интерпретацию: если считать, что эллипс «зеркален», т. е. что лучи света, распространяющиеся в плоскости, отражаются от эллипса, то лучи, исходящие от точечного источника света, помещенного в одном из фокусов, соберутся в другом фокусе (рис. 10).

Действительно, угол, образованный с эллипсом падающим на него лучом света, равен по законам оптики углу, образованному с эллипсом отраженным лучом. Угол, образованный прямой и кривой

(в данном случае лучом света и эллипсом), измеряется углом между этой прямой и касательной к кривой, проведенной в вершине угла. Поскольку падающий луч идет по фокальному радиусу, то, в силу доказанной теоремы, отраженный луч пойдет по другому фокальному радиусу.

§ 3. ЗАДАЧИ О КАСАТЕЛЬНЫХ К ПАРАБОЛЕ И ГИПЕРБОЛЕ

Параболой (рис. 11) называется геометрическое место точек P, равноудаленных от некоторой точки F (называемой *фокусом* параболы) и некоторой прямой d, называемой *директрисой*

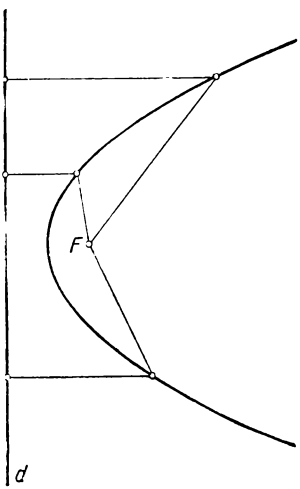

Рис. 11.

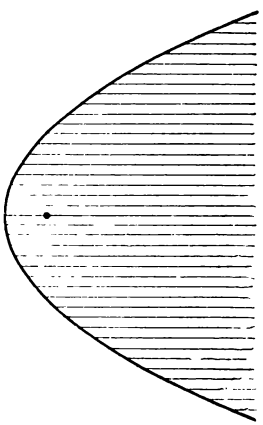

Рис. 12.

параболы. (Подробнее о параболе см. уже упоминавшуюся книгу А. И. Маркушевича.) Парабола делит плоскость на две части: в одной из них находится директриса, в другой (заштрихованной на рис. 12) — фокус. Прямая, имеющая с параболой ровно одну общую точку и целиком расположенная в одной из частей, на которые параболой разделяется плоскость, называется *касательной* к параболе. На рис. 13 прямая p касательная, а прямая q не является касательной, хотя и имеет с параболой лишь одну общую точку.

Справедлива следующая теорема о касательной к параболе: *Если из произвольной точки P параболы* (рис. 14) *провести отрезок PF, соединяющий P с фокусом, и*

отрезок PD, перпендикулярный к директрисе, то углы, образованные этими отрезками с касательной p в точке P, равны (так, на рис. 14 $\angle DPK = \angle KPF$).

Эту теорему можно «доказать», опираясь на «механические» соображения, аналогично теоремам из двух предыдущих параграфов. Дадим набросок такого «доказательства».

Проведем на произвольном расстоянии l от прямой d пря-

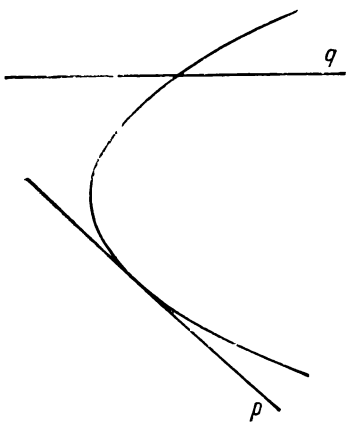

Рис. 13.

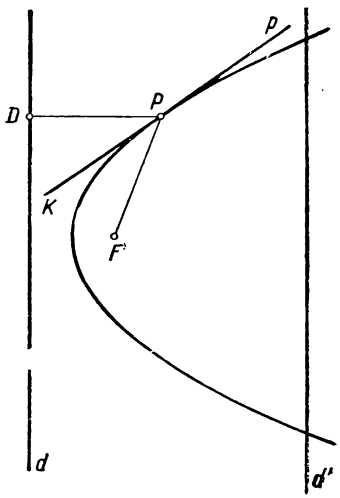

Рис. 14.

мую $d' \parallel d$, однако так, чтобы точка P лежала между d и d'. Повернем чертеж так, чтобы он лежал в вертикальной плоскости, касательная p была горизонтальна и парабола была расположена над p. Будем мыслить себе прямую d' в виде тонкого стержня, по которому скользит кольцо (рис. 15). К кольцу прикрепим нить длины l, другой конец нити закрепим в точке F. На эту нить наденем грузик, могущий скользить вдоль нее. Пусть положение равновесия грузика есть M, а положение кольца в это время есть D'. Нить будет натянута, поэтому отрезки нити MF и MD' будут прямолинейны. Заметим прежде всего, что

$$MD' \perp d'. \qquad (1)$$

(Если бы это было не так, то, как видно из рис. 16, составляющая T_1 силы T натяжения нити вдоль стержня d' была бы отлична от нуля и заставила бы кольцо

сдвинуться.) Далее, повторяя рассуждения предыдущего параграфа, устанавливаем, во-первых, что углы, образованные

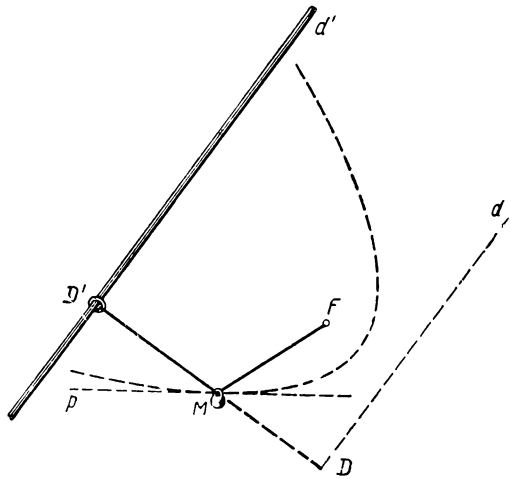

Рис. 15.

отрезками MD' и MF с прямой p, равны и, во-вторых, что

$$MD' + MF = l. \tag{2}$$

Проведем $MD \perp d$. Так как расстояние между d и d' равно l, то из (1) и (2) следует, что

$$MD = MF. \tag{3}$$

А это означает, что M лежит на параболе, причем поскольку M занимает самое нижнее из возможных положений, а P есть самая нижняя точка параболы, то M совместится с P.

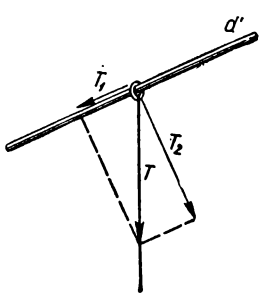

Рис. 16.

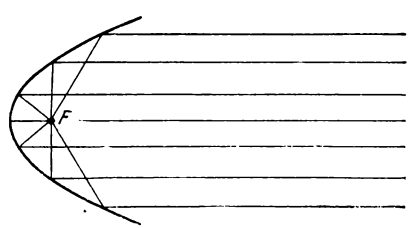

Рис. 17.

Следовательно, в конечном счете углы, составленные отрезками PF и PD с прямой p, равны.

В книге Л. А. Люстерника «Кратчайшие линии» приведено другое, также «механическое» доказательство этой теоремы. Свойство углов, образуемых касательной к параболе, позволяет строить эту касательную при помощи циркуля и линейки.

Оптическая интерпретация доказанной теоремы такова: лучи света, выходящие из фокуса параболы, отражаясь от нее, превращаются в пучок лучей, идущих перпендикулярно к ее директрисе (рис. 17). Это свойство параболы используется в прожекторах, рефлекторах и других устройствах, служащих для придания лучам (световым или тепловым) нужного направления: отражающая поверхность каждого из этих устройств представляет собой поверхность вращения параболы вокруг перпендикуляра, опущенного из фокуса на директрису.

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2 (называемых *фокусами*) постоянна. (О гиперболе также см. в «Замечательных кривых» А. И. Маркушевича.) Гипербола, как это видно на рис. 18, состоит из двух ветвей. Расстояние от любой точки P' левой ветви (на рис. 18) до F_1 *меньше* на заданную величину расстояния от P' до F_2; расстояние от любой точки P'' правой ветви до F_2 *меньше* на ту же самую величину расстояния от P'' до F_1. Как и парабола, каждая ветвь гиперболы делит плоскость на две части. Прямая, целиком расположенная в одной из этих частей и имеющая с данной ветвью ровно одну общую точку, называется *касательной к данной ветви гиперболы*. На рис. 19 показана прямая, касающаяся левой ветви гиперболы в точке P. Можно доказать, что касательная к одной из ветвей гиперболы не пересекает другую ветвь. Всякую касательную к одной из ветвей гиперболы называют также просто *касательной к гиперболе*.

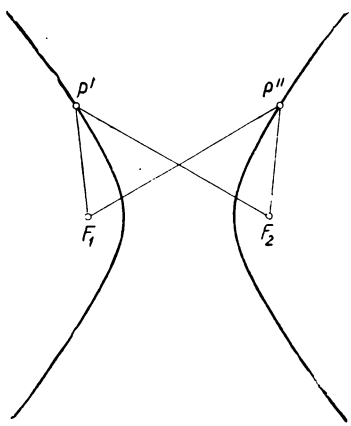

Рис. 18.

Как и в случае эллипса, прямолинейные отрезки, соединяющие фокусы с точкой на гиперболе, называются *фокальными радиусами*.

Имеет место теорема о касательной к гиперболе: *Касательная к гиперболе образует равные углы с*

фокальными радиусами, проведенными в точку касания (так, на рис. 19 $\angle F_1PL = \angle LPF_2$).

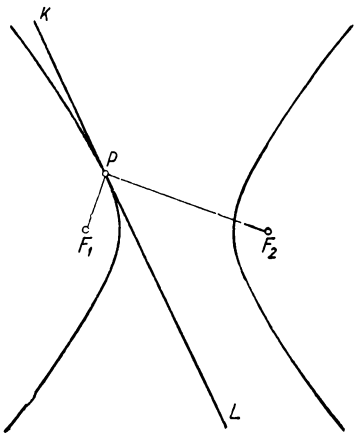

Рис. 19.

Мы не будем проводить доказательства этой теоремы (предоставляем его читателю); приведем лишь лежащее в его основе «механическое» построение. По определению гиперболы, разность между фокальными радиусами постоянна; обозначим эту разность через a. Пусть точка касания P лежит на правой ветви (рис. 20). Проведем из левого фокуса F_1 окружность столь большого радиуса r, что, во-первых, $r > a$ и, во-вторых, точка P лежит внутри этой окружности. Будем мыслить себе окружность в виде проволочного кольца, по которому скользит другое, маленькое кольцо.

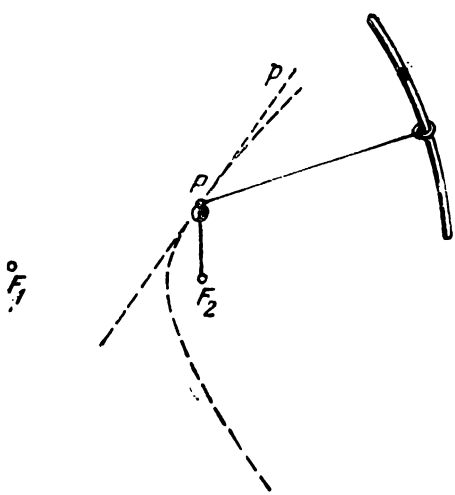

Рис. 20.

Возьмем нить длины $r - a$ и проденем ее сквозь грузик,

могущий скользить вдоль нее. Прикрепим один конец нити к маленькому кольцу, а другой закрепим в правом фокусе F_2. Если теперь повернуть чертеж так, чтобы прямая p (касательная) была горизонтальна, а соответствующая ветвь гиперболы лежала над прямой p, то надетый на нить грузик в положении покоя будет находиться в точке P. Это обстоятельство и позволяет доказать теорему при помощи уже применявшихся нами рассуждений. Заметим, что если точка касания лежит на левой ветви, то можно повторить построение, описывая окружность из правого фокуса. Можно, однако, и в этом случае воспользоваться окружностью с центром в левом фокусе, только нить тогда надо брать длины $r+a$.

Как и предыдущие теоремы о касательных, теорема о касательной к гиперболе дает способ ее построения.

§ 4. ПРИНЦИП МИНИМУМА ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

Грузик, поднятый на какую-то высоту, способен при падении произвести работу, т. е. обладает потенциальной энергией. Как известно из школьного курса физики, потенциальная энергия грузика весом q, поднятого на высоту h, измеряется произведением qh. Мы видим, что потенциальная энергия тем меньше, чем ниже находится грузик. Стремление грузика занять самое нижнее положение связано с тем, что потенциальная энергия стремится уменьшиться. Если грузик прикреплен к нити, то в самом нижнем положении, которое он может занимать, потенциальная энергия будет минимальна. Поэтому сыгравшее при доказательстве теорем о касательных решающую роль утверждение (A), гласящее, что в положении равновесия грузик занимает самое нижнее из возможных положений, равносильно следующему утверждению:

(U) *В положении равновесия потенциальная энергия грузика достигает наименьшего значения.*

В свою очередь утверждение (U) (а значит, и (A)) является следствием утверждения (E) о единственности положения равновесия и следующего утверждения:

(D′) *Если в некотором положении грузика его потенциальная энергия достигает наименьшего значения, то это положение является положением равновесия.*

Чтобы вывести отсюда (U), достаточно заметить, что если бы в положении равновесия потенциальная энергия не достигала наименьшего значения, то существовало бы, в силу (D′),

еще другое положение равновесия, соответствующее наименьшему значению потенциальной энергии; но это противоречит утверждению (E).

Утверждение (D′) является частным случаем общего принципа механики, называемого принципом минимума потенциальной энергии, или принципом Дирихле (обоснование этого принципа см., например, в § 13 упоминавшейся уже книги Л. А. Люстерника). Принцип Дирихле гласит:

То положение системы, в котором потенциальная энергия достигает наименьшего значения, является положением равновесия.

Если положение равновесия единственно, то принцип Дирихле допускает важное следствие:

В положении равновесия потенциальная энергия системы достигает наименьшего значения.

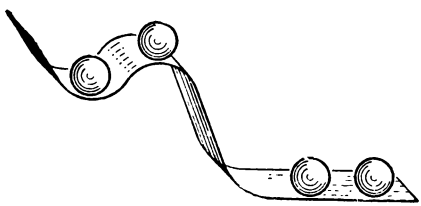

Рис. 21.

Вывод этого следствия аналогичен выводу утверждения (U).

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь такие случаи, когда положение равновесия единственно (возможны и другие случаи; так, на рис. 21 показаны четыре положения равновесия шара).

Конечно, для решения задач о касательных нет надобности прибегать к принципу минимума потенциальной энергии; то, что грузик занимает самое нижнее из возможных положений, само по себе является очевидным. Однако в других случаях, когда мы имеем дело не с одним, а с несколькими грузиками, связанными между собой, было бы неверно утверждать, что в положении равновесия каждый из них занимает самое нижнее из возможных положений; здесь приходится находить положения всех грузиков, а для этого часто бывает удобным использовать понятие потенциальной энергии.

Приведем пример.

В замечательной книге польского математика Г. Штейнгауза «Математический калейдоскоп» (Гостехиздат, М.— Л., 1949) есть такая задача (тема 39).

«Для трех деревень нужно построить общую школу. В первой деревне живут 50, во второй 70, а в третьей 90 детей. Где нужно выбрать место для школы, чтобы сумма времени, которое придется тратить всем детям на хождение в школу, была минимальной?

Для решения этой задачи достаточно положить на стол план местности (рис. 22), затем пробуравить в столе отверстия в местах расположения деревень, пропустить через эти отверстия три веревочки, верхние концы их связать в один узел, а к нижним подвесить нагрузки соответственно в 50, 70 и 90 единиц (например, 500, 700 и 900 граммов). Школа должна быть построена там, где окажется узел. (Почему?)»

Чтобы ответить на вопрос «почему?», поставленный в задаче, подсчитаем потенциальную энергию системы, состоящей в данном случае из трех грузиков. Если веса грузиков равны q_1, q_2 и q_3 и если первый грузик находится на высоте h_1, второй — на высоте h_2 и третий — на высоте h_3, то потенциальная энергия равна сумме потенциальных энергий отдельных грузиков [1]):

$$E = q_1h_1 + q_2h_2 + q_3h_3. \qquad (1)$$

Пусть теперь r_1, r_2, r_3 — расстояния от узла до первой, второй и третьей деревень соответственно; l_1, l_2, l_3 — длины первой, второй и третьей нитей и h — высота поверхности стола. Очевидно, в какой бы точке ни оказался узел и на каких бы высотах h_1, h_2, h_3 ни находились при этом грузики, выполняются соотношения

$$r_1 + (h - h_1) = l_1,\ r_2 + (h - h_2) = l_2,\ r_3 + (h - h_3) = l_3$$

или

$$h_1 = r_1 + h - l_1,\ h_2 = r_2 + h - l_2,\ h_3 = r_3 + h - l_3.$$

Тогда равенство (1) можно переписать так:

$$E = q_1r_1 + q_2r_2 + q_3r_3 + C,$$

где

$$C = (q_1 + q_2 + q_3)h - q_1l_1 - q_2l_2 - q_3l_3$$

есть величина постоянная, не зависящая от положения грузиков.

---

[1]) Действительно, потенциальная энергия измеряется той работой, которая может быть произведена. Если мы обрежем нити, то каждый грузик при падении произведет работу, равную его потенциальной энергии, а вся система — работу, равную сумме этих отдельных работ.

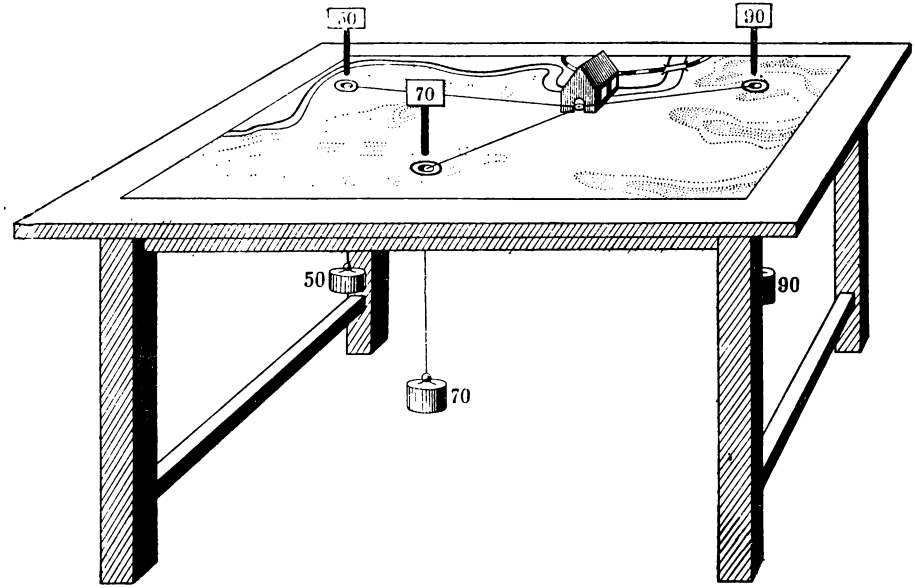

Рис. 22.

В силу принципа минимума потенциальной энергии, если E принимает наименьшее значение, то система находится в равновесии. Отсюда — в предположении единственности положения равновесия — следует, что в положении равновесия величина E минимальна. Но если величина E минимальна, то и величина

$$T = q_1 r_1 + q_2 r_2 + q_3 r_3 = E - C$$

тоже минимальна. Но T как раз и есть сумма времени, которое тратят дети, чтобы дойти из своих деревень в ту школу, где находится узел. Так что при положении узла, соответствующего равновесию системы, эта сумма времени действительно достигает своего наименьшего значения.

§ 5. МАТЕРИАЛЬНЫЕ ТОЧКИ И ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

До сих пор мы ничего не говорили о размерах тех грузиков, которые подвешивались на нитях. Из проводившихся рассуждений видно, что, с одной стороны, мы предполагали грузики очень маленькими по размеру (столь маленькими, что о положении каждого из них можно было говорить как о точке), с другой стороны, мы наделяли их определенными весами и, стало быть, массами.

Подобные рассмотрения подводят нас к одному из основных понятий механики — понятию материальной точки [1]). Под материальной точкой в механике понимают тело столь малое, что его размерами можно пренебречь. Материальную точку можно представлять себе как геометрическую точку, которой приписано определенное число («масса»). Заметим, что поскольку материальная точка имеет определенную массу, то она имеет и определенный вес.

Если имеется какая-либо система материальных точек, то на каждую из точек действует сила тяжести, пропорциональная массе точки. Равнодействующая всех этих параллельных сил приложена в особой точке, называемой центром тяжести данной системы материальных точек. Положение центра тяжести зависит от положения точек системы и от их масс.

В механике всякое тело рассматривается как состоящее из весьма большого числа материальных точек. Эти материальные точки имеют, вообще говоря, разную массу, так что рас-

[1]) К сожалению, это важнейшее понятие не включено в теперешний учебник физики для средней школы (А. В. Перышкин, В. В. Крауклис, Курс физики, часть первая, «Механика», Учпедгиз, М., 1957).

пределение массы внутри тела неравномерно: одни части тела имеют бо́льшую, другие — меньшую массу. Мы даже будем допускать, что отдельные части тела могут вообще не иметь никакой массы и являться тем самым «невесомыми» [1]). Центр тяжести системы материальных точек, образующих тело, и называется, по определению, центром тяжести самого тела. Если масса тела сосредоточена в конечном числе отдельных его точек (а такие случаи нам встретятся в дальнейшем — например, невесомый стержень с насаженными на него точечными грузами), то центр тяжести такого тела совпадает, очевидно, с центром тяжести системы этих отдельных точек.

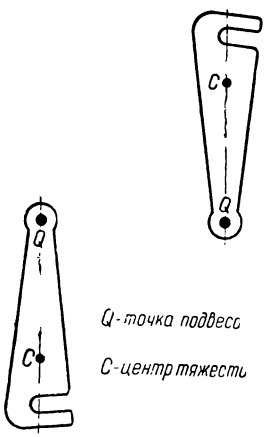

Рис. 23.

Многие свойства тела зависят исключительно от положения его центра тяжести. Как известно из школьного курса физики, равновесие тела зависит от взаимного расположения его центра тяжести и множества точек, в которых оно закреплено. Именно имеют место следующие утверждения:

Утверждение I. *Если тело, закрепленное в одной точке, находится в покое, то эта точка и центр тяжести находятся на одной вертикали* (рис. 23).

Утверждение II. *Если тело, имеющее площадь опоры или ребро опоры, находится в покое, то вертикаль, опущенная из центра тяжести, пересекает эту площадь или ребро* (рис. 24).

Из этих утверждений (которые можно использовать для экспериментального нахождения центра тяжести) вытекает, в частности, следующее обстоятельство: если произвести замену какого-либо тела другим, имеющим ту же форму и тот же центр тяжести, то положение равновесия не изменится. Однако в целом ряде случаев необходимо учитывать, кроме положения

---

[1]) Более точно, под невесомым телом (или телом «с нулевой массой») мы понимаем тело с массой столь малой, что ею можно пренебречь. Читатель заметит параллелизм между понятием материальной точки и понятием невесомого тела. Пренебрежение массой тела играет в механике не менее важную роль, чем пренебрежение размером. Так, во всех предыдущих рассуждениях мы пренебрегали весами (но не размерами!) нитей.

центра тяжести, еще и общую массу тела (т. е. суммарную массу составляющих тело материальных точек). Например, если мы заменим не все тело, а лишь *часть* его некоторым новым телом, имеющим ту же форму и тот же центр тяжести, что и заменяемая часть, то равновесие *всего тела* может нарушиться, так как положение центра тяжести всего тела может измениться за счет изменения массы его части. Знание положения центра тяжести и суммарной массы является уже достаточным при решении многих задач, во всяком случае при решении всех тех задач, которые нам встретятся в дальнейшем. Естественно поэтому ввести следующее определение эквивалентности двух систем материальных точек.

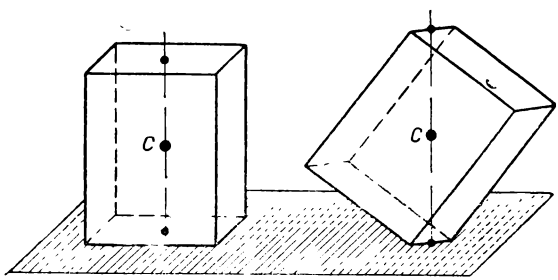

Рис. 24.

Две системы материальных точек эквивалентны, если, во-первых, центр тяжести первой системы совпадает с центром тяжести второй системы и, во-вторых, сумма масс всех точек первой системы равна сумме масс всех точек второй системы.

Введенное нами понятие эквивалентности систем замечательно тем, что при замене части некоторой системы системой, эквивалентной этой части, мы придем к системе, эквивалентной первоначальной. Придадим этому утверждению более отчетливую формулировку.

Пусть дана система $\bar{\alpha}$ материальных точек $\overline{M}_1, \ldots, \overline{M}_r$ с массами $\overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_r$ и система α материальных точек $\underline{M}_1, \ldots, \underline{M}_s$ с массами $\underline{m}_1, \ldots, \underline{m}_s$. Объединим обе эти системы в одну общую систему α, которую зададим следующим образом:

1° Включим в α всякую материальную точку системы $\bar{\alpha}$, не совпадающую по положению ни с одной из точек системы $\underline{\alpha}$.

2° Включим в α всякую материальную точку системы $\underline{\alpha}$, не совпадающую по положению ни с одной из точек системы $\overline{\alpha}$.

3° Если некоторая материальная точка $\overline{M}_i$ системы $\overline{\alpha}$ совпадает по положению с некоторой материальной точкой $\underline{M}_j$ системы $\underline{\alpha}$, то включим в α новую материальную точку, положение которой совпадает с положением материальных точек $\overline{M}_i$ и $\underline{M}_j$, а масса которой равна сумме $\overline{m}_i + \underline{m}_j$ масс указанных материальных точек. Справедливо следующее

Утверждение III. *Если система α есть результат объединения систем $\overline{\alpha}$ и $\underline{\alpha}$, а система β есть результат объединения систем $\overline{\beta}$ и $\underline{\beta}$, и если системы $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ эквивалентны и системы $\underline{\alpha}$ и $\underline{\beta}$ эквивалентны, то системы α и β также эквивалентны.*

Доказательство утверждения III. То, что суммарные массы систем α и β совпадают, очевидно. Покажем, что совпадают и центры тяжести этих систем. Равнодействующую сил тяжести, действующих на материальные точки системы α, можно найти следующим образом: сперва найти равнодействующую $\overline{P}$ сил тяжести, действующих на $\overline{\alpha}$, затем найти равнодействующую $\underline{P}$ сил тяжести, действующих на $\underline{\alpha}$, и, наконец, найти равнодействующую P этих равнодействующих. Точно так же равнодействующую Q сил тяжести, действующих на систему β, можно найти как равнодействующую двух сил: $\overline{Q}$ и $\underline{Q}$, где $\overline{Q}$ — равнодействующая сил, действующих на $\overline{\beta}$, и $\underline{Q}$ — равнодействующая сил, действующих на $\underline{\beta}$. В силу эквивалентности $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ силы $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ совпадают. Точно так же совпадают силы $\underline{P}$ и $\underline{Q}$. А потому совпадают и равнодействующие этих сил — силы P и Q. В частности, совпадают и точки их приложения, т. е. центры тяжести систем α и β.

Заметим, что для всякой системы материальных точек можно построить эквивалентную ей систему, состоящую всего из одной материальной точки. Для этого достаточно рассмотреть материальную точку, находящуюся в центре тяжести первоначальной системы и имеющую массу, равную суммарной массе системы. Эта материальная точка и образует систему, эквивалентную первоначальной. Материальную точку, расположенную в центре тяжести какой-либо системы и имеющую массу, равную суммарной массе системы, будем называть *материальным центром* данной системы. Эквивалентные системы можно определить как такие системы, материальные центры которых совпадают.

§ 6. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ СИСТЕМЫ ДВУХ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Пусть на невесомом стержне укреплены два груза P и Q, находящиеся на расстоянии d друг от друга (рис. 25). Требуется найти центр тяжести стержня с этими грузами. В силу утверждения I из предыдущего параграфа, наш вопрос равносилен вопросу о том, в какой точке O надо подпереть стержень, чтобы он находился в равновесии. Обозначим расстояния искомой точки O от грузов P и Q через u и v. Равновесие наступит тогда и только тогда, когда произведение силы P на плечо u равно произведению силы Q на плечо v, т. е.

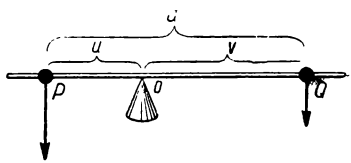

Рис. 25.

$$Pu = Qv. \tag{1}$$

Сравнивая равенство (1) с равенством

$$u + v = d, \tag{2}$$

получаем

$$u = \frac{Q}{P+Q}d, \quad v = \frac{P}{P+Q}d.$$

Заметим, что $\frac{u}{v} = \frac{Q}{P}$, так что расстояния от центра тяжести до грузов обратно пропорциональны самим грузам.

В частности, если оба груза равны по весу, то центр тяжести находится посредине между грузами (что очевидно и непосредственно); обратно, если известно, что центр тяжести находится посредине, то отсюда следует, что оба груза равны.

Если один из грузов вдвое больше другого, то центр тяжести находится ближе к большему грузу, деля расстояние между грузами в отношении 1:2; обратно, если известно, что центр тяжести делит расстояние между грузами в отношении 1:2, то один из грузов (а именно тот, который ближе к центру тяжести) вдвое больше другого.

Поскольку центр тяжести стержня, масса которого сосредоточена в двух точках M и N, совпадает с центром тяжести системы двух материальных точек M и N (с соответствующими массами), то мы получили следующий результат.

Центр тяжести системы двух материальных точек лежит на прямой, соединяющей эти точки. Его расстояние от этих точек обратно пропорционально их весам (а значит, и их массам).

В частности, центр тяжести делит расстояние между точками пополам тогда и только тогда, когда обе точки имеют равные веса; центр тяжести делит расстояние между точками в отношении 1:2 тогда и только тогда, когда одна из точек вдвое тяжелее другой (при этом центр тяжести ближе к более тяжелой точке).

§ 7. ТЕОРЕМЫ О ПЕРЕСЕЧЕНИИ ПРЯМЫХ

Рассмотрим какую-либо систему материальных точек α, являющуюся объединением систем γ и δ. Обозначим через M и N материальные центры систем γ и δ. В силу утверждения III из § 5 система материальных точек M и N эквивалентна системе α. Поэтому материальный центр системы α совпадает с материальным центром системы, состоящей из точек M и N, и следовательно, лежит на прямой, соединяющей эти точки. Поскольку материальный центр системы расположен в ее центре тяжести, то мы получили следующую теорему:

Центр тяжести системы материальных точек, являющейся объединением систем γ и δ, лежит на прямой, соединяющей центры тяжести систем γ и δ.

Мы дадим сейчас три геометрических применения этой теоремы.

Медианы треугольника пересекаются в одной точке. Поместим в вершины треугольника равные точечные грузы, которые обозначим теми же буквами A, B, C, что и соответствующие вершины (рис. 26). Полученную систему материальных точек разобьем на две части γ и δ так, чтобы A входила в γ, а B и C в δ. Центр тяжести системы γ находится в A, а центр тяжести системы δ в силу результатов предыдущего параграфа находится в середине E стороны BC. Согласно теореме, установленной в начале настоящего параграфа, центр тяжести O системы A, B, C лежит на медиане AE. Совершенно так же убеждаемся, что O лежит и на двух других медианах. Стало быть, все три медианы непременно пересекутся в одной точке.

Поскольку материальный центр M системы δ (находящийся в точке E) вдвое тяжелее материального центра системы γ, совпадающего с материальной точкой A, то центр тяжести системы $\{M, A\}$ делит отрезок EA в отношении 1:2, причем находится ближе к E. Но этот центр тяжести и есть центр тяжести системы A, B, C, т. е. общая точка пересечения всех медиан. Мы получили, следовательно, известную теорему о том,

что точка пересечения медиан отсекает от каждой медианы третью часть, считая от соответствующей стороны.

Пространственный четырехугольник. Пусть дан пространственный четырехугольник $ABCD$ (рис. 27). Покажем, что прямые EF и KL, соединяющие середины его противоположных сторон, пересекаются. Поместим в вершины четырехугольника равные грузы, которые будем считать материальными точками.

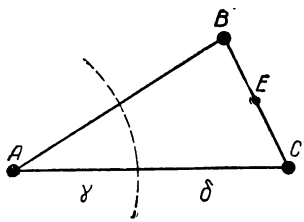

Рис. 26.

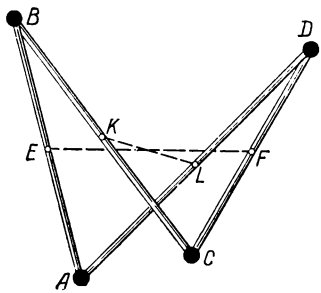

Рис. 27.

Как и при «доказательстве» теоремы о медианах, достаточно обнаружить, что центр тяжести четырехугольника лежит на каждой из прямых EF и KL. Покажем, например, что он лежит на EF (то, что он лежит на KL, обнаруживается аналогично). Для этого разобьем систему материальных точек A, B, C, D на две части; в одну из них включим точки A и B, в другую — C и D. Центр тяжести первой части будет расположен в точке E; центр тяжести второй части — в точке F. В силу теоремы, сформулированной в начале параграфа, центр тяжести всего четырехугольника расположен на прямой EF. Предоставляем читателю убедиться, что отрезки EF и KL, пересекаясь, делятся пополам.

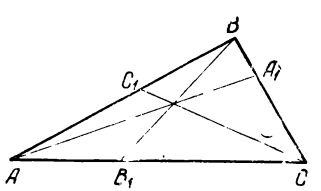

Рис. 28.

Теорема Чевы. Теорема о том, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, является частным случаем следующего положения, известного под именем теоремы Чевы:

Пусть A_1, B_1, C_1 — три точки, лежащие соответственно на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC (рис. 28); *для того чтобы прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы имело место*

соотношение

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1. \qquad (1)$$

Рекомендуем читателю проверить, что соотношение (1) действительно имеет место в следующих случаях:

1. Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 суть биссектрисы треугольника. (Указание: использовать теорему о том, что биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.) Отсюда вытекает, что биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке.

2. Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 суть высоты треугольника. (Указание: использовать формулу, выражающую длины отрезков, на которые высота делит соответствующую сторону.) Отсюда вытекает, что высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке.

Перейдем к доказательству теоремы Чевы.

Пусть соотношение (1) имеет место. Покажем, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Рассуждение протекает так же, как и в предыдущих двух пунктах. Мы покажем, что при соответствующим образом подобранных грузах, размещенных в вершинах, центр тяжести системы лежит на каждой из прямых AA_1, BB_1, CC_1. Пусть (в каком-то масштабе)

$$AB_1=a,\quad B_1C=b,$$
$$CA_1=c,\quad A_1B=d,$$
$$BC_1=e,\quad C_1A=f,$$

так что

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}=1. \qquad (2)$$

Поместим в вершине A груз, равный bd, в вершине B — груз, равный ac, и в вершине C — груз, равный ad. Центр тяжести системы $\{A, C\}$ лежит в точке, расстояния которой от вершин A и C обратно пропорциональны грузам в этих вершинах; но такой точкой является B_1. Точно так же центр тяжести системы $\{B, C\}$ лежит в точке A_1. Наконец, центр тяжести системы $\{A, B\}$ лежит в точке, расстояния которой x и y до вершин A и B обратно пропорциональны грузам bd и ac, т. е.

$$\frac{x}{y}=\frac{ac}{bd} \quad \text{и} \quad x+y=f+e.$$

Но из соотношения (2) вытекает, что

$$\frac{ac}{bd}=\frac{f}{e}.$$

Поэтому $x=f$, $y=e$. Следовательно, центр тяжести системы $\{A, B\}$ попадет в точку C_1. Остается заметить, что, в силу приведенной в начале параграфа теоремы, центр тяжести всего треугольника лежит на каждой из прямых AA_1, BB_1, CC_1.

Обратно, пусть прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке O; покажем, что имеет место соотношение (1). Для этого представим себе наш треугольник в виде невесомой пластинки; расположим его горизонтально, подопрем в точке O и поместим в вершинах грузы таким образом, чтобы треугольник оказался в равновесии (рис. 29). В силу утверждения I из § 5, точка O будет центром тяжести треугольника с подобранными, как указано, грузами в вершинах и, следовательно, центром тяжести системы этих грузов. Поэтому точка O должна лежать на прямой, соединяющей A с центром тяжести системы $\{B, C\}$; следовательно, A_1 есть центр тяжести системы $\{B, C\}$. Точно так же B_1 и C_1 суть центры тяжести систем $\{C, A\}$ и $\{A, B\}$. Если массы материальных точек A, B, C обозначить соответственно через p, q, r, то, согласно предыдущему параграфу,

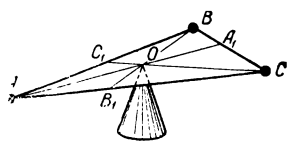

Рис. 29.

$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{r}{p},\quad \frac{CA_1}{A_1B}=\frac{q}{r},\quad \frac{BC_1}{C_1P}=\frac{p}{q}.$$

Перемножая эти пропорции, получаем требуемое соотношение (1).

§ 8. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ СТЕРЖНЯ С МНОГИМИ ГРУЗАМИ

Обобщим рассмотрения § 6.

Представим себе теперь невесомый стержень (рис. 30) с насаженными на него грузами с весами P_1, P_2, ..., P_n и поставим задачу о нахождении центра тяжести этого стержня. Как и в § 6, для решения задачи достаточно найти такую точку O, что, если стержень подпереть в этой точке, он окажется в равновесии. Вычислим абсциссу x такой точки опоры[1]).

[1]) Под абсциссой точки на стержне мы здесь и в дальнейшем будем понимать расстояние от этой точки до левого конца стержня.

Пусть абсцисса груза P_1 равна a_1, абсцисса груза P_2 равна a_2 и т. д.; наконец, абсцисса груза P_n равна a_n. Предположим (рис. 30), что точка опоры O находится между грузами P_k и P_{k+1} (при этом не исключается случай, когда один из этих грузов помещен как раз в O). Тогда плечи сил $P_1, \ldots, P_k$ будут равны соответственно $x - a_1, \ldots, x - a_k$, а плечи сил $P_{k+1}, \ldots, P_n$ будут равны соответственно $a_{k+1} - x, \ldots, a_n - x$. Так как стержень находится в равновесии, то сумма моментов сил, закручивающих его против часовой стрелки, должна быть

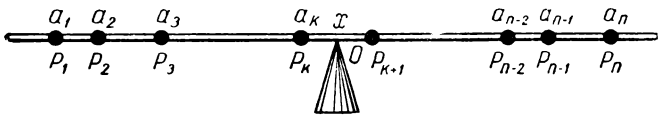

Рис. 30.

равна сумме моментов сил, закручивающих его по часовой стрелке, т. е.

$$P_1(x - a_1) + \ldots + P_k(x - a_k) = P_{k+1}(a_{k+1} - x) + \ldots + P_n(a_n - x).$$

Перенося члены, содержащие x, в левую часть, а остальные — в правую, имеем

$$(P_1 + \ldots + P_k + P_{k+1} + \ldots + P_n)x = P_1a_1 + \ldots + P_ka_k + P_{k+1}a_{k+1} + \ldots + P_na_n.$$

Отсюда

$$x = \frac{P_1a_1 + \cdots + P_na_n}{P_1 + \cdots + P_n}.$$

Пример 1. Пусть $P_1 = 1$, $P_2 = 2$, ..., $P_n = n$; $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, ..., $a_n = n$. В таком случае по выведенной формуле

$$x = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{1 + 2 + \cdots + n}.$$

Чтобы вычислить это отношение, выпишем равенства

$$\begin{aligned}
1^3 &= (1+0)^3 = 1^3,\\
2^3 &= (1+1)^3 = 1^3 + 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1,\\
3^3 &= (2+1)^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(n+1)^3 &= (n+1)^3 = n^3 + 3\cdot n^2 + 3\cdot n + 1.
\end{aligned}$$

Складывая эти равенства, получаем

$$1^3+2^3+\ldots+(n+1)^3=1+(1^3+2^3+\ldots+n^3)+$$
$$+3\ (1^2+2^2+\ldots+n^2)+3\ (1+2+\ldots+n)+n,$$

или

$$(n+1)^3=1+3\ (1^2+2^2+\ldots+n^2)+$$
$$+3\ (1+2+\ldots+n)+n,$$

или

$$3\ (1^2+2^2+\ldots+n^2)=(n+1)\ (n^2+2n)-$$
$$-3\ (1+2+\ldots+n).$$

Разделим обе части на $3\ (1+2+\ldots+n)$. Тогда получим

$$\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{1+2+\ldots+n}=$$
$$=\frac{(n+1)\ (n^2+2n)}{3\ (1+2+\ldots+n)}-1.$$

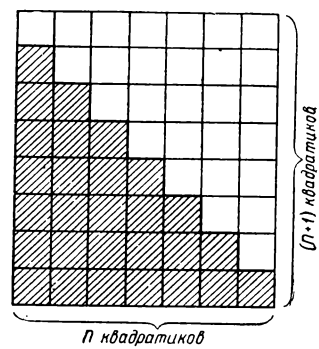

Рис. 31.

В сумме $1+2+\ldots+n$ столько же единиц, сколько заштрихованных квадратиков на рис. 31. А число этих заштрихованных квадратиков равно числу незаштрихованных, т. е. половине числа всех квадратиков прямоугольника, т. е. $\frac{n\ (n+1)}{2}$. Поэтому

$$x=\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{1+2+\ldots+n}=\frac{(n+1)\ (n^2+2n)}{3\ (1+2+\ldots+n)}-1=$$
$$=\frac{(n+1)\ (n^2+2n)}{3\ \frac{n\ (n+1)}{2}}-1=\frac{2n+1}{3}.$$

Отсюда, между прочим, получаем, что

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{2n+1}{3}(1+2+\ldots+n)=$$
$$=\frac{2n+1n}{3}\ \frac{(n+1)}{2}=\frac{n\ (n+1)\ (2n+1)}{6}.$$

Пример 2. Пусть те же грузы, что и в примере 1, т. е. грузы с весами 1, 2, ..., n, расположены в точках с абсциссами 1^2, 2^2, ..., n^2. Докажите, что абсцисса центра тяжести есть

$$\frac{n\ (n+1)}{2}.$$

(Указание: воспользовавшись результатом примера 1, вычислить сумму кубов $1^3+2^3+\ldots+n^3$.)

Пример 3. Пусть в тех же точках, что и в примере 1, т. е. в точках с абсциссами 1, 2, ..., n, расположены грузы с весами 1^2, 2^2, ..., n^2. Докажите, что абсцисса центра тяжести есть

$$\frac{3n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

§ 9. ОДНА ЗАДАЧА ИЗ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ (ФОРМУЛИРОВКА)

Механические соображения помогают иногда решать не только геометрические, но и арифметические задачи. Один довольно неожиданный пример [1]) такого рода будет сейчас рассмотрен.

Возьмем строку из положительных чисел P_1, P_2, ..., P_n; для того чтобы сократить ее длину, мы вычтем из крайних членов P_1 и P_n число P, равное наименьшему из этих крайних членов, а взамен прибавим P к средним членам (если средних членов — один, то оба числа P прибавляются к этому единственному среднему члену). При этом (если только $n>2$) одно или два крайних числа обращаются в нуль, т. е. уничтожаются; следовательно, полученная строка будет уже короче первоначальной. Так, например, если первоначальная строка имела вид

1, 9, 3, 4,

то мы получим строку

10, 4, 3.

Если первоначальная строка имела вид

6, 2, 6,

то мы получим строку, состоящую из одного числа, а именно

14.

Полученную более короткую строку будем называть «производной» от первоначальной. Таким образом, строка 10, 4, 3 является производной от строки 1, 9, 3, 4, а строка 14 — производной от строки 6, 2, 6. Заметим, что для строки, состоящей из двух чисел, ее производная совпадает с ней самой.

Зададимся теперь какой-либо строкой α и поступим следующим образом. Найдем производную этой строки, обозна-

[1]) Этот пример любезно сообщен автору Петром Сергеевичем Новиковым.

чим ее α'. Далее найдем производную строку от строки α'. Эту новую строку обозначим α'' и назовем второй производной строки α. Производную от α'' назовем третьей производной от α и обозначим α''' и вообще производную от $(n-1)$-й производной назовем n-й производной и обозначим $\alpha^{\underbrace{'\ldots'}_{n\text{ штрихов}}}$. Поскольку длина каждой следующей производной на одну или две единицы меньше длины предыдущей, то, вычисляя последовательно производные для строки α, мы придем, наконец, к строке, длина которой равна 1 или 2; эту строку мы назовем последней производной или характеристикой строки α. Так, характеристикой строки 1, 9, 3, 4 будет строка 7, 10.

Заметим, что при переходе от строки к ее производной сумма всех членов строки не меняется. Поэтому сумма всех членов характеристики равна сумме всех членов первоначальной строки; в случае, когда характеристика состоит из одного члена, его величина как раз и равна этой сумме. Что же касается случая характеристики длины два, то мы научимся вычислять величины ее членов (не вычисляя всех промежуточных производных) в следующем параграфе. А теперь поставим общий вопрос о том, когда характеристика строки состоит из одного, а когда из двух членов. Попытаемся выяснить сперва, как обстоит дело, путем «математического эксперимента». С этой целью вычислим характеристики нескольких строк типа 1, 2, 3, ..., n. Последовательные производные будем подписывать друг под другом и подчеркивать средние члены:

Пример 1.	α	1	2	3		
	α'		4	2		
Пример 2.	α	1	2	3	4	
	α'		3	4	3	
	α''			10		
Пример 3.	α	1	2	3	4	5
	α'		2	5	4	4
	α''			7	6	2
	α'''			5	10	

Пример 4.

α	1	2	3	4	5	6	
α'		2	4	5	5	5	
α''			4	9	5	3	
α'''			1	12	8		
α''''				14	7		

Пример 5.

α	1	2	3	4	5	6	7
α'		2	3	6	5	6	6
α''			3	8	7	6	4
α'''				8	13	6	1
α''''				7	14	7	
α'''''					28		

Пример 6.

α	1	2	3	4	5	6	7	8
α'		2	3	5	6	6	7	7
α''			3	5	10	6	7	5
α'''				5	13	9	7	2
α''''				3	13	13	7	
α'''''					16	16	4	
α''''''					12	24		

Пример 7.

α	1	2	3	4	5	6	7	8	9
α'		2	3	4	7	6	7	8	8
α''			3	4	9	8	7	8	6
α'''				4	9	14	7	8	3
α''''				1	9	17	10	8	
α'''''					9	19	10	7	
α''''''					2	26	17		
α'''''''						30	15		

Приведенные примеры показывают, что характеристика строки, представляющей собой отрезок натурального ряда,

может состоять как из одного, так и из двух членов. Можно подметить следующую закономерность: характеристика состоит из одного члена, если $n=3k+1$, а в противном случае — из двух членов. При этом обнаруживается новая интересная особенность: если характеристика состоит из двух членов, то один из них вдвое больше другого. Таким образом выявляется следующая любопытная теорема:

Характеристика строки 1, 2, 3, ..., n *состоит из одного члена при* $n=3k+1$ *и из двух при* $n=3k$ *или* $n=3k+2$; *в последнем случае один из двух членов (первый при* $n=3k$ *и второй при* $n=3k+2$) *вдвое больше другого.*

Эта теорема и будет доказана в следующем параграфе; при этом не будет забыт и более общий вопрос: для каких строк характеристика состоит из одного, а для каких — из двух членов (как определить это по числам $P_1, P_2, \ldots, P_n$, не вычисляя всех производных строк)?

§ 10. ОДНА ЗАДАЧА ИЗ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ (РЕШЕНИЕ)

Дадим нашей задаче новое, механическое истолкование. Вместо строки чисел $P_1, P_2, \ldots, P_n$ рассмотрим стержень (рис. 32, *а*), нагруженный в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (таких,

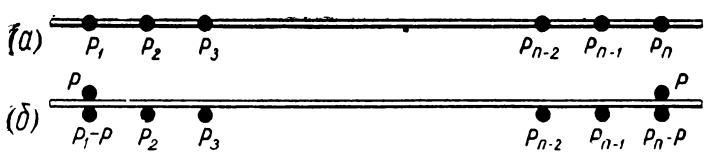

Рис. 32.

что $A_1A_2=A_2A_3=\ldots=A_{n-1}A_n$) грузами $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Тогда производной строке отвечает новая система грузов.

Покажем, что материальный центр производной системы грузов совпадает с материальным центром первоначальной системы. Расщепим мысленно каждый из крайних грузов P_1 и P_n на два точечных груза

$$P_1=P+(P_1-P),\quad P_n=P+(P_n-P),$$

где P — наименьший из грузов P_1 и P_n (так что по крайней мере один из грузов P_1-P и P_n-P равен нулю). Тогда систему грузов α можно представить как объединение двух систем: системы $\underline{\alpha}$, состоящей из грузов P_1-P, $P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n-P$ (изображена *под* стержнем на рис. 32, *б*), и

системы $\bar{\alpha}$, состоящей из двух грузов весом P каждый (изображена *над* стержнем на рис. 32, *б*). При переходе к производной системе грузов все грузы системы $\underline{\alpha}$ остаются на своих местах, а грузы системы $\bar{\alpha}$ сближаются, перемещаясь каждый на одинаковое расстояние (чтобы прибавиться к средним членам!). Другими словами, производная система α' является объединением двух систем $\underline{\alpha}'$ и $\bar{\alpha}'$, из которых система $\underline{\alpha}'$ совпадает с системой $\underline{\alpha}$, а система $\bar{\alpha}'$ получается из системы $\bar{\alpha}$ сближением обоих грузов последней на одинаковое расстояние. Поскольку, очевидно, $\bar{\alpha}'$ и $\bar{\alpha}$ эквивалентны, то в силу утверждения III из § 5 эквиваленты и системы α и α'. А материальные центры эквивалентных систем совпадают.

Итак, при переходе от системы грузов к ее производной материальный центр (а значит, и центр тяжести) системы не меняется. Следовательно, он не меняется и при переходе от первоначальной системы к ее характеристике.

Таким образом, характеристика — это один или два точечных груза, имеющих тот же центр тяжести, что и первоначальная система грузов. Заметим еще, что положения точечных грузов, составляющих характеристику, совпадают с положениями некоторых грузов первоначальной системы, т. е. с какими-то из точек $A_1, \ldots, A_n$. Если характеристика содержит два груза то эти грузы расположены в соседних точках, A_j и A_{j+1}, а центр тяжести характеристики — между ними. Поэтому характеристика тогда и только тогда состоит из одного груза, когда ее центр тяжести (или, что то же самое, центр тяжести первоначальной системы) совпадает с одной из точек $A_1, \ldots, A_n$.

Согласно § 8 центр тяжести первоначальной системы имеет абсциссу

$$\frac{P_1a_1 + P_2a_2 + \ldots + P_na_n}{P_1 + P_2 + \ldots + P_n},$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — абсциссы точек $A_1, \ldots, A_n$. Если принять, что $a_1 = 1$, $a_2 = 2, \ldots, a_n = n$, то абсцисса центра тяжести выразится формулой

$$\frac{P_1 \cdot 1 + P_2 \cdot 2 + \ldots + P_n \cdot n}{P_1 + P_2 + \ldots + P_n}.$$

Чтобы центр тяжести совместился с одной из целочисленных точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, необходимо и достаточно, чтобы его абсцисса выражалась целым числом. Отсюда вытекает окончательно, что *характеристика строки* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *тогда и только тогда состоит из одного члена, когда число* $\dfrac{P_1 \cdot 1 + P_2 \cdot 2 + \ldots + P_n \cdot n}{P_1 + P_2 + \ldots + P_n}$ — *целое.*

В частности, если $P_1 = 1^2$, $P_2 = 2^2$, ..., $P_n = n^2$, то (см. пример 3 из § 8) число $\frac{P_1 \cdot 1 + P_2 \cdot 2 + \ldots + P_n \cdot n}{P_1 + \ldots + P_n}$ равно $\frac{3n(n+1)}{2(2n+1)}$. Это число никогда не является целым (за исключением тривиального случая $n = 1$). Действительно, если бы это число было целым, то было бы целым и число $4\frac{3n(n+1)}{2(2n+1)}$. А тогда целым числом являлась бы и разность

$$4\frac{3n(n+1)}{2(2n+1)} - (3n+1) = \frac{n-1}{2n+1}.$$

Но число $\frac{n-1}{2n+1}$ является целым лишь в случае $n - 1 = 0$. Итак, при $n > 1$ характеристика строки 1, 4, 9, ..., n^2 всегда состоит из двух чисел.

Если $P_1 = 1$, $P_2 = 2$, ..., $P_n = n$, то (см. пример 1 из § 8) значением выражения $\frac{P_1 \cdot 1 + \ldots + P_n \cdot n}{P_1 + \ldots + P_n}$ служит число $\frac{2n+1}{3}$. Если $n = 3k + 1$, то число $\frac{2n+1}{3} = 2k + 1$ целое и характеристика состоит из одного члена. Если $n = 3k$, то $\frac{2n+1}{3} = 2k + \frac{1}{3}$; если $n = 3k + 2$, то $\frac{2n+1}{3} = (2k+1) + \frac{2}{3}$; в обоих последних случаях $\frac{2n+1}{3}$ не есть целое число и характеристика состоит из двух членов. Этим доказана первая часть теоремы, сформулированной в конце предыдущего параграфа.

Если $n = 3k$, то центр тяжести системы грузов $1, 2, \ldots, n$ имеет, как только что показано, абсциссу $2k + \frac{1}{3}$ и, следовательно, расположен между точками A_{2k} и A_{2k+1}. Поэтому именно в этих точках находятся грузы, образующие характеристику первоначальной системы. Поскольку центр тяжести оказался вдвое ближе к точке A_{2k}, чем к точке A_{2k+1}, то из двух грузов характеристики тот, который расположен в A_{2k}, вдвое больше того, который расположен в A_{2k+1}. Мы получим, таким образом, что в случае $n = 3k$ первый член характеристики вдвое больше второго. Если теперь $n = 3k + 2$, то абсцисса центра тяжести равна $(2k+1) + \frac{2}{3}$. Центр тяжести в этом случае расположен между точками A_{2k+1} и A_{2k+2}, причем вдвое ближе ко второй из этих точек. Поэтому груз (характеристики), расположенный во второй точке, вдвое больше груза в первой точке; другими словами, второй член характеристики вдвое больше первого. Тем самым теорема из § 9 доказана полностью.

Сумма членов характеристики строки $1, 2, \ldots, n$ равна сумме членов самой строки, т. е. $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ (см. пример 1 из § 8). Зная, что один из членов вдвое больше другого, мы можем вычислить и сами эти члены. Получаем для них следующие значения: $\frac{n(n+1)}{6}$ (меньший член) и $\frac{n(n+1)}{3}$ (больший член).

Окончательно, характеристика строки $1, 2, \ldots, n$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &\frac{n(n+1)}{3},\ \frac{n(n+1)}{6} && (\text{если } n=3k),\\ &\frac{n(n+1)}{2} && (\text{если } n=3k+1),\\ &\frac{n(n+1)}{6},\ \frac{n(n+1)}{3} && (\text{если } n=3k+2). \end{aligned}$$

В общем случае для вычисления характеристики строки $P_1, \ldots, P_n$ надо поступить следующим образом. Прежде всего найти число

$$x=\frac{P_1\cdot 1+P_2\cdot 2+\ldots+P_n\cdot n}{P_1+P_2+\ldots+P_n}.$$

Если x целое, то характеристика состоит из одного члена, величина которого равна сумме $P_1+P_2+\ldots+P_n$. Если x не целое, то надо представить x в виде

$$x=y+z,$$

где y — целое и $0<z<1$. Характеристика в этом случае состоит из двух чисел Q_1 и Q_2, причем

$$Q_1+Q_2=P_1+P_2+\ldots+P_n. \qquad (1)$$

Так как Q_1 и Q_2 можно мыслить себе в виде грузов, расположенных в точках с абсциссами y и $y+1$ и имеющих центр тяжести в точке с абсциссой x, то (согласно § 5):

$$\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{1-z}{z}. \qquad (2)$$

Решая совместно (1) и (2), находим Q_1 и Q_2:

$$Q_1=\frac{1-z}{z}Q_2,\quad \frac{1}{z}Q_2=\frac{1-z}{z}Q_2+Q_2=Q_1+Q_2=P_1+\ldots+P_n,$$

$$Q_2=(P_1+\ldots+P_n)z,\quad Q_1=(P_1+\ldots+P_n)(1-z). \qquad (3)$$

В качестве последнего примера найдем характеристику строки $1, 4, 9, \ldots, n^2$ $(n>1)$. Мы уже видели, что в этом случае $x=\frac{3n(n+1)}{2(2n+1)}$ и характеристика состоит из двух чисел. Чтобы вычислить члены

характеристики, надо сперва найти z. С этой целью положим $n=4k+r$, где $r=0, 1, 2, 3$. Тогда

$$x=\frac{3n(n+1)}{2(2n+1)}=\frac{3(4k+r)(4k+r+1)}{2[2(4k+r)+1]}=3k+\frac{3}{2}\,\frac{2k+4kr+r+r^2}{8k+2r+1}.$$

Если $r=0$, то $x=3k+\frac{3}{2}\,\frac{2k}{8k+1}=3k+\frac{3k}{8k+1}$; следовательно, $z=\frac{3k}{8k+1}=\frac{v}{2n+1}$, где $v=3k$.

Если $r=1$, то $x=3k+\frac{3}{2}\,\frac{6k+2}{8k+3}=3k+1+\frac{k}{8k+3}$, следовательно, $z=\frac{k}{8k+3}=\frac{v}{2n+1}$, где $v=k$.

Если $r=2$, то $x=3k+\frac{3}{2}\,\frac{10k+6}{8k+5}=3k+1+\frac{7k+4}{8k+5}$, следовательно, $z=\frac{7k+4}{8k+5}=\frac{v}{2n+1}$, где $v=7k+4$.

Если $r=3$, то $x=3k+\frac{3}{2}\,\frac{14k+12}{8k+7}=3k+2+\frac{5k+4}{8k+7}$, следовательно, $z=\frac{5k+4}{8k+7}=\frac{v}{2n+1}$, где $v=5k+4$.

Сумма членов характеристики равна $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (см. пример 1 из § 8). Члены характеристики вычисляются по формулам (3):

$$Q_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}z=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,\frac{v}{2n+1}=\frac{n(n+1)v}{6},$$

$$Q_1=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}(1-z)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,\frac{2n+1-v}{2n+1}=$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1-v)}{6}.$$

Заменяя здесь n через $4k$, $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$ и учитывая зависимость v от k, получаем окончательно, что характеристика строки $1, 4, 9, \ldots, n^2$ имеет вид:

$$\frac{2k(4k+1)(5k+1)}{3},\quad 2k^2(4k+1)\qquad (\text{если } n=4k),$$

$$\frac{(2k+1)(4k+1)(7k+3)}{3},\quad \frac{k(2k+1)(4k+1)}{3}\qquad (\text{если } n=4k+1),$$

$$\frac{k+1)(2k+1)(4k+3)}{3},\quad \frac{(2k+1)(4k+3)(7k+4)}{3}\qquad (\text{если } n=4k+2),$$

$$2(k+1)^2(4k+3),\quad \frac{2(k+1)(4k+3)(5k+4)}{3}\qquad (\text{если } n=4k+3).$$

§ 11. НЕВОЗМОЖНОСТЬ ВЕЧНОГО ДВИГАТЕЛЯ

Рассмотрим какой-нибудь выпуклый многоугольник и точку O внутри него. Опустим из точки O перпендикуляры на стороны многоугольника. Основания этих перпендикуляров могут лежать как на самих сторонах (как, например, перпендикуляр, опущенный на сторону AB на рис. 33), так и на продолжениях сторон (как перпендикуляры на стороны FA и EF на том же чертеже). Может, конечно, случиться, что основания всех перпендикуляров попадут на стороны (так будет, например, если O есть центр правильного многоугольника). Спрашивается: может ли случиться, что основания всех перпендикуляров попадут не на стороны, а на продолжения сторон? Оказывается, что так случиться не может, т. е. *основание хотя бы одного перпендикуляра лежит на соответствующей стороне (а не на ее продолжении).* Для доказательства этого утверждения используем принцип,

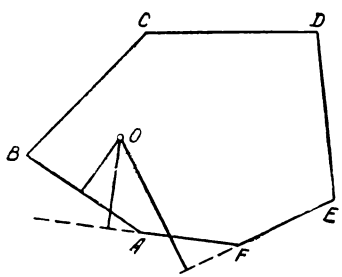

Рис. 33.

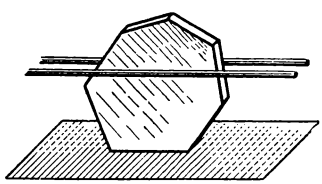

Рис. 34.

сформулированный в заглавии параграфа. Представим себе наш многоугольник в виде тонкой пластинки с центром тяжести в точке O (можно, например, считать, что вся пластинка невесомая, а в точке O находится точечный груз). Поставим многоугольник ребром на горизонтальный пол. Если мы поставим его строго вертикально, то он не упадет; если угодно, можно считать, что он поддерживается с обоих боков перилами (рис. 34). Многоугольник или останется стоять, или покатится; если он покатится, то в конце концов он все равно остановится (в противном случае мы получили бы вечный двигатель). В том положении, в котором он остановится, перпендикуляр из центра тяжести на ребро опоры обязательно пересечет это ребро (в силу утверждения II из § 5). Итак, мы нашли сторону многоугольника, для которой основание перпендикуляра из O лежит на ней самой.

Аналогичная теорема справедлива и для многогранника. Именно, пусть дан выпуклый многогранник и точка O внутри него. Опустим из этой точки на плоскости всех граней многогранника перпендикуляры. Тогда *основание хотя бы одного из этих перпендикуляров лежит на самой грани (а не на ее продолжении).*

Для доказательства представим себе многогранник в виде материального тела с центром тяжести в O. (Будем, например, считать весь многогранник невесомым, а в точку O поместим точечный груз.) Поставим теперь наш многогранник какой-либо его гранью на горизонтальный пол. Многогранник либо останется стоять в равновесии, либо покатится; в последнем случае рано или поздно он опять-таки остановится в равновесии. Итак, у многогранника существует положение, в котором он неподвижно стоит на полу. Рассмотрим ту грань, которая является его площадью опоры. В силу утверждения II из § 5 перпендикуляр, опущенный из O на плоскость этой грани, проходит через самоё эту грань. Мы нашли, таким образом, грань, удовлетворяющую сформулированным в теореме требованиям.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все задачи, которые мы разбирали, можно было бы решить и чисто математически. Однако не следует думать, что использование для решения математических задач механических соображений — просто игра ума. Подобные методы имеют и историческое, и практическое значение.

Еще Архимед применял законы равновесия к нахождению площадей криволинейных фигур; так, для вычисления площади параболического сегмента (т. е. фигуры, ограниченной дугой параболы и стягивающей эту дугу хордой) он «подвешивал» сегмент к плечу рычага [1]). Во все времена механические и физические соображения оказывали и оказывают существенное влияние на получение математических результатов (если не в форме прямого доказательства, то в качестве наводящих рассуждений [2]).

Применение в математике законов механики — частный случай общего приема, заключающегося в обратном использовании связи между явлениями природы и их математическим описанием. Описать математически какое-либо явление — означает найти формулы, позволяющие вычислять физические характеристики этого явления (скорости, температуры, расстояния и т. д.), или уравнения, решениями которых служат указанные характеристики. Прямое использование математического описания состоит в том, что мы можем узнать численные значения характеристик, не наблюдая самого явления, а производя вычисления по соответствующим формулам или решая соответствующие уравнения. Так поступать целесообразно тогда, когда

---

[1]) См. книги: В. Ф. Каган, Архимед, М. — Л., Гостехиздат, 1949 и С. Я. Лурье, Архимед, М. — Л., изд. АН СССР, 1945.

[2]) Добавление при корректуре. См. в этой связи главу IX («Физическая математика») вышедшей недавно в русском переводе книги Д. Пойа, Математика и правдоподобные рассуждения, М., ИЛ, 1957.

само явление сложно, а его математическое описание просто. Можно, однако, поступить наоборот: вместо того, чтобы вычислять значения формул или решать уравнения, осуществить само явление опытным путем, измерить интересующие нас характеристики и тем самым экспериментально получить значения формул и решения уравнений. Такой путь целесообразен тогда, когда мы имеем дело со сложными формулами или трудно решаемыми уравнениями, описывающими, однако, явления, которые сравнительно легко осуществить.

Этот принцип лежит в основе моделирования (т. е. исследования физических процессов на моделях), при котором осуществляется следующая схема: нужно изучить процесс A (моделируемый); он описывается формулами и уравнениями E; одновременно E служит описанием для процесса A' (моделирующего), осуществимого в лабораторных условиях; осуществляют процесс A', тем самым находят значения формул и решения уравнений E и, следовательно, устанавливают нужные свойства процесса A. О процессе A (а также о формулах и уравнениях E) говорят, что он *моделируется* процессом A'. Прибавим еще, что если два процесса описываются одними и теми же формулами или уравнениями, то в таком случае говорят об имеющей место между этими процессами *аналогии*.

Простейшим примером моделирования является изложенное в § 4 решение задачи Штейнгауза. Моделируемое явление A — хождение детей в школу; интересующая нас характеристика — затрачиваемое время. Это время является значением некоторой формулы. Находится моделирующее явление A' (подвешивание грузов на нитях), для которого значением этой же формулы служит величина потенциальной энергии. Последнее явление осуществляется экспериментально.

Метод моделирования имеет большое практическое значение[1]) (в качестве моделирующих используются главным образом гидродинамические и электрические процессы). В частности, этот метод лежит в основе многих типов так называемых интегрирующих машин; с принципом действия простейшей из них — фрикционного интегратора — мы сейчас познакомимся.

Пусть дана прямая p и кривая l, лежащая по одну сторону от этой прямой (рис. 35), причем каждый перпендикуляр к p пересекает l не более чем в одной точке. Возьмем два таких перпендикуляра AB и CD и будем искать площадь S крово-

[1]) См. статьи А. Н. Колмогорова, Моделирование и Л. И. Гутенмахера, Моделирование математическое, в 28-м томе второго издания Большой Советской Энциклопедии.

линейной трапеции $ABDC$. С этой целью разобьем отрезок на мелкие части точками

$$X_1 = A,\ X_2,\ X_3,\ \ldots,\ X_n,\ X_{n+1} = C$$

(на рис. 36 $n = 6$). В каждом из отрезков $X_i\ X_{i+1}$ выберем точку T_i, из которой восставим перпендикуляр до пересечения

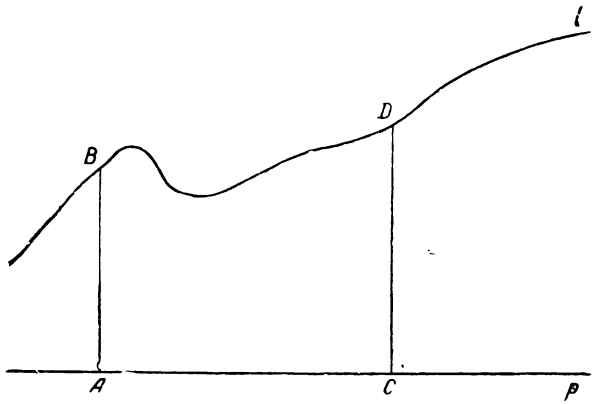

Рис. 35.

с кривой l в точке Y_i. Из каждой точки Y_i проведем прямые, параллельные p, до встречи с перпендикулярами, восставленными в точках X_i. Площадь S' ступенчатой фигуры, заштрихо-

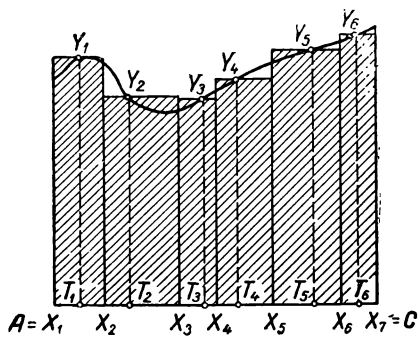

Рис. 36.

ванной на рис. 36, приближенно равна площади S криволинейной трапеции, причем тем ближе к площади последней, чем мельче отрезки $X_i\ X_{i+1}$, на которые разбито основание AC.

Пусть длины отрезков X_1, X_2, ..., X_n X_{n+1} равны соответственно α_1, ..., α_n, а длины отрезков T_1Y_1, ..., T_nY_n равны соответственно y_1, ..., y_n. Тогда площадь S' равна

$$\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n. \qquad (1)$$

Рассмотрим теперь систему, состоящую из диска I и колеса II, прижатого своим ободом к диску I (рис. 37). Колесо II может перемещаться вдоль своей оси. Пусть в какой-то момент расстояние колеса II от центра O диска I равно y.

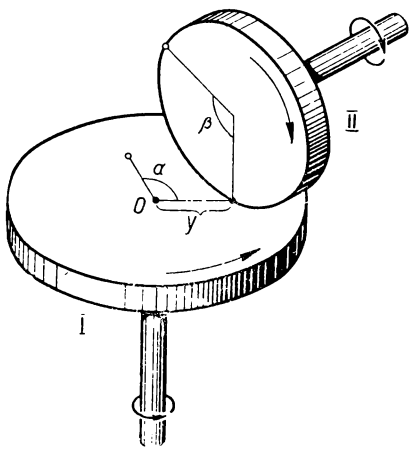

Рис. 37.

Повернем диск I на угол α (в радианной мере). Та, лежащая на диске I точка, которая до поворота диска соприкасалась с колесом II, пройдет при этом дугу, равную αy; такое же расстояние пройдет и точка, лежащая на ободе колеса II. Колесо II повернется при этом на угол β. Поскольку при повороте колеса II на угол β точка его окружности проходит дугу βr, где r — радиус колеса II, то $\alpha y = \beta r$. Примем, что $r = 1$; тогда $\beta = \alpha y$. Если теперь установить колесо II на расстоянии y_1 от центра O и повернуть диск на угол α_1, затем установить колесо II на расстояние y_2 от центра O и повернуть диск на угол α_2 и т. д., наконец, установить колесо II на расстоянии y_n от центра O и повернуть диск на угол α_n, то суммарный угол, на который в результате повернется колесо II, будет численно равен величине (1), т. е. площади S' ступенчатой фигуры, заштрихованной на рис. 36.

Нарисуем прямую p и кривую l на листе бумаги (рис. 38). Рассмотрим следующий механизм. Рейка укреплена на двух колесиках, одно из которых катится по прямой p (так что рейка постоянно перпендикулярна к этой прямой). На рейку насажен движок, способный перемещаться вдоль рейки. В центре движка укреплен штифт, конец которого касается бумаги. Представим себе, что рейка связана с диском I и колесом II следующим образом: поворот колесика рейки вызывает поворот диска I на тот же угол; расстояние колеса II от центра диска O равно в любой момент расстоянию центра движка от начала рейки. Радиус колесика рейки примем равным 1. Будем

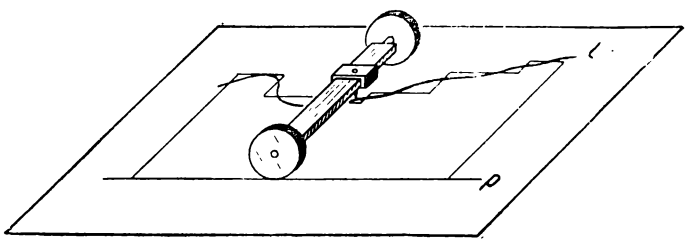

Рис. 38.

обводить штифтом контур ступенчатой фигуры, построенной на рис. 38; при этом рейка будет катиться вдоль прямой p, а движок перемещаться по рейке. Из сказанного в предыдущем абзаце вытекает, что в результате колесо II повернется на величину, равную площади S'. Чем мельче разбиение на части отрезка AC, тем ближе ломаная, составляющая контур ступенчатой фигуры, приближается к кривой l и тем ближе S' приближается к S. Если поэтому обводить штифтом не ломаную, а самоё кривую l, то колесо II повернется на величину, равную S. Поворот колеса II может регистрироваться на специальной шкале.

Моделируемым процессом здесь является процесс измерения площади криволинейной трапеции при помощи вычисления площадей ступенчатых фигур. Этот процесс описывается формулой (1). Та же формула, как оказалось, описывает некоторый другой процесс, связанный с фрикционным механизмом, изображенным на рис. 37. Это дает нам возможность моделировать посредством указанного механизма формулу (1) и выражаемый ею процесс измерения площади.

Механические аналогии привели нас, таким образом, к прибору для вычисления площадей криволинейных фигур (правда, фигур особого вида — криволинейных трапеций [1])).

Заканчивая наше изложение, сделаем одно замечание принципиального характера. Все рассуждения, основанные на привлечении механических соображений, могут показаться придирчивому читателю некорректными. Уже первый, самый простой пример, разобранный в § 1, способен вызвать возражения. Действительно, нить не есть прямая (она имеет определенную толщину, и, если на нее посмотреть в микроскоп, окажется довольно неправильной формы), так что фраза «нить идет по прямой» не имеет точного смысла. Далее, в строгом смысле нельзя говорить о конце нити как о точке (да и само утверждение, что груз прикреплен к нити в определенной точке, тоже не является безупречным). Наконец, всякая реальная нить растяжима, поэтому длина нити с грузом больше длины нити без груза.

Можно было бы привести много критических замечаний подобного рода, относящихся как к только что проведенному рассуждению, так и к аналогичным рассуждениям, которые лежат в основе всего изложения. Однако не следует думать, что все эти рассуждения тем самым лишаются познавательной ценности. Мы считаем их не менее убедительными, чем геометрические доказательства. Дело в том, что все наши утверждения о нитях, грузах и т. п. имеют лишь приблизительный характер и выполняются тем точнее, чем более совершенными свойствами обладает взятый нами объект (нить, груз, и т. п.). В нашем случае некоторые утверждения (например, «нить идет по прямой») выполняются тем точнее, чем тоньше выбранная нить; в таком случае говорят, что эти утверждения выполняются для бесконечно тонкой нити. Другие утверждения (например, что длины нити с грузом и без груза равны) выполняются тем точнее, чем менее растяжима нить; в таком случае про эти утверждения говорят, что они выполняются для абсолютно нерастяжимой нити. Ясно, что бесконечно тонких и абсолютно нерастяжимых нитей в природе не бывает. Это такое же идеальное понятие, как, например, известное из школьного курса понятие точки приложения силы; выводы, сделанные для сил, приложенных в точках, выполняются реально тем точнее, чем меньше поверхность взаимодействия тел. Такой же идеализацией является и понятие материальной точки; факты, установленные для материальных точек, выполняются для реальных тел тем точнее, чем меньше их объемы.

Хочется подчеркнуть здесь, что все понятия и законы механики (как и вообще физики) связаны с идеализацией явлений природы; поэтому уже школьник, быть может, не отдавая себе в том отчета, сплошь и рядом сталкивается с подобными идеализациями. Возьмем,

[1]) Приборы, дающие площадь криволинейной трапеции при обводе ее криволинейной стороны, называются интегриметрами (см. Б. Н. Делоне, Краткий курс математических машин, ч. 1, М.— Л., Гостехиздат, 1952). Приборы, дающие площадь произвольной фигуры при полном обводе ее контура, называются планиметрами. О планиметрах см. в упомянутой только что книге Б. Н. Делоне и в книге А. М. Лопшица, Вычисление площадей ориентированных фигур, составляющей 20-й выпуск настоящей серии.

например, одно из начальных понятий механики — понятие равномерного движения. Совершенно равномерных движений в природе не бывает (при тщательном измерении оказывается, что даже стрелки часов движутся неравномерно). Однако в целом ряде случаев неравномерность столь мала, что ею целесообразно пренебречь; так и возникает понятие равномерного движения. То же самое можно сказать о первом законе Ньютона: ведь тел, на которые не действуют другие тела, не бывает. Список подобных примеров можно было бы продолжать до бесконечности, они пронизывают всю физику.

Мы видим, таким образом, что механика оперирует, по существу, не с реальными, а с идеальными телами и процессами, такими, как «тело, на которое не действуют другие тела», «прямолинейное равномерное движение» и т. д. При этом мы обращаемся с этими идеальными объектами как с реальными, т. е. так, как если бы они существовали в действительности.

Отметим, наконец, что механические абстракции (такие, как материальная точка, невесомая бесконечно тонкая абсолютно нерастяжимая нить и др.) ничем не отличаются по своей природе от геометрических абстракций (таких, как точка, прямая, плоскость и т. д.); ведь точки, прямые и плоскости не существуют в природе в виде реальных объектов, и реальный смысл утверждений, которые о них делаются, состоит в том, что они выполняются тем точнее, чем больше взятые реальные объекты приближаются по своим свойствам к точкам, прямым, плоскостям и т. д.

Цена 75 коп.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вып. 1. **А. И. Маркушевич.** Возвратные последовательности
Вып. 2. **И. П. Натансон.** Простейшие задачи на максимум и минимум.
Вып. 3. **И. С. Соминский.** Метод математической индукции.
Вып. 4. **А. И. Маркушевич.** Замечательные кривые.
Вып. 5. **П. П. Коровкин.** Неравенства.
Вып. 6. **Н. Н. Воробьев.** Числа Фибоначчи.
Вып. 7. **А. Г. Курош.** Алгебраические уравнения произвольных степеней.
Вып. 8. **А. О. Гельфонд.** Решение уравнений в целых числах.
Вып. 9. **А. И. Маркушевич.** Площади и логарифмы.
Вып. 10. **А. С. Смогоржевский.** Метод координат.
Вып. 11. **Я. С. Дубнов.** Ошибки в геометрических доказательствах.
Вып. 12. **И. П. Натансон.** Суммирование бесконечно малых величин.
Вып. 13. **А. И. Маркушевич.** Комплексные числа и конформные отображения.
Вып. 14. **А. И. Фетисов.** О доказательствах в геометрии.
Вып. 15. **И. Р. Шафаревич.** О решении уравнений высших степеней.
Вып. 16. **В. Г. Шерватов.** Гиперболические функции.
Вып. 17. **В. Г. Болтянский.** Что такое дифференцирование?
Вып. 18. **Г. М. Миракьян.** Прямой круговой цилиндр.
Вып. 19. **Л. А. Люстерник.** Кратчайшие линии.
Вып. 20. **А. М. Лопшиц.** Вычисление площадей ориентированных фигур.
Вып. 21. **Л. И. Головина и И. М. Яглом.** Индукция в геометрии.
Вып. 22. **В. Г. Болтянский.** Равновеликие и равносоставленные фигуры.
Вып. 23. **А. С. Смогоржевский.** О геометрии Лобачевского.
Вып. 24. **Б. И. Аргунов и Л. А. Скорняков.** Конфигурационные теоремы.
Вып. 25. **А. С. Смогоржевский.** Линейка в геометрических построениях.
Вып. 26. **Б. А. Трахтенброт.** Алгоритмы и машинное решение задач.
Вып. 27. **В. А. Успенский.** Некоторые приложения механики к математике.